ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΝΗΜΟΝΙΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ‘ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ’[*]

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΜΑΡΙΟΛΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ακολούθως παρατίθενται, πολύ συνοπτικά, ορισμένοι μαθηματικοί ορισμοί και λήμματα. Εμπίπτουν στο πεδίο του ‘Διαφορικού Λογισμού’ και χρησιμεύουν στις παραδόσεις του μαθήματος ‘Εισαγωγή στην Πολιτική Οικονομία’. Βεβαίως, το παρόν δεν υποκαθιστά τις παραδόσεις του μαθήματος ‘Οικονομικά Μαθηματικά’ ή τη μελέτη αντιστοίχων εγχειριδίων.

Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: $y = f(x)$, όπου x η ανεξάρτητη μεταβλητή και y η εξαρτημένη μεταβλητή.

Ι.1. Πρώτη Παράγωγος ή ρυθμός μεταβολής: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$, όπου Δy η μεταβολή του y, δηλ. η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης, συνεπεία μεταβολής του x κατά Δx.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = 3x^2$. Έχουμε:

$$y + \Delta y \equiv f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 \to$$
$$\Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

Άρα, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$ και, συνεπώς, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$, δηλ. $\dfrac{d(3x^2)}{dx} \equiv (3x^2)' = 6x$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\boxed{\dfrac{d(x^a)}{dx} \equiv (cx^a)' = cax^{a-1}}$, όπου c, a οποιοιδήποτε μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

Παρατήρηση: Το dy καλείται διαφορικό της συνάρτησης και εκφράζει τη μεταβολή του y συνεπεία μεταβολής του x κατά dx, δηλ. συνεπεία οριακής (ή, αλλιώς, ‘μικρής’) μεταβολής του x. Από τον ορισμό της πρώτης παραγώγου προκύπτει: $\boxed{dy = f'(x)dx}$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = x^2$. Ως γνωστόν, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$. Άρα, $dy = (2x)dx$. Έστω το σημείο: $x_0 = 2$, όπου $y_0 = 2^2 = 4$. Εάν το x γίνει $x_1 = 6$, δηλ. μεταβληθεί κατά $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_0 = 4$, η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά:

$$\Delta y_1 \equiv y_1 - y_0 = (x_0 + \Delta x_1)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x_1 + (\Delta x_1)^2 = (2*2*4) + 4^2 = 32$$

(πράγματι: $6^2 - 2^2 = 32$). Εάν εφαρμόσουμε τον τύπο του διαφορικού, παίρνουμε: $dy_1 = 2x_0 dx_1 = 2*2*4 = 16$ και, προφανώς, $dy_1 < \Delta y_1$. Στην περίπτωση, όμως, που το

---

[*] Το τι θα όφειλε να (μην) περιλαμβάνει το παρόν συζητήθηκε σε συναντήσεις της ‘Ομάδας Μελέτης Σραφφαϊανών Οικονομικών’ (‘Study Group on Sraffian Economics’) στο Πάντειο Πανεπιστήμιο, κατά το Σεπτέμβριο του 2008 και τον Μάρτιο του 2009. Ευχαριστώ τους Νίκο Ροδουσάκη, Ελευθερία Ροδουσάκη και Γιώργο Σώκλη για τις προτάσεις των.

Δx_1 είναι ‘μικρό’, μπορούμε να θέσουμε $(\Delta x_1)^2 \approx 0$, δηλ. να <u>αγνοήσουμε</u> αυτόν τον όρο (τον <u>όρο ‘ανώτερης τάξης’</u>, όπως αυτός καλείται) και, επομένως, να πάρουμε τον <u>προσεγγιστικό</u> τύπο: $\Delta y_1 \approx 2x_0 \Delta x_1$. Π.χ. εάν $\Delta x_1 = 0.1$, τότε ο τελευταίος τύπος μας δίνει: $\Delta y_1 \approx 2*2*0.1 = 0.40$, ενώ η αληθής τιμή του Δy_1 είναι ίση με: $(2*2*0.1) + 0.1^2 = 0.41$ και, συνεπώς, το <u>απόλυτο σφάλμα</u> του προσεγγιστικού τύπου είναι: 0.41– 0.40 = 0.01, ενώ το <u>σχετικό σφάλμα</u> του είναι

$$(0.41 - 0.40) / 0.40 \simeq 2.5\%$$

<u>Συμπέρασμα</u>: όσο πιο μικρή είναι η μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβολής, δηλ. το Δx, τόσο περισσότερο το διαφορικό, δηλ. το dy, προσδιορίζει με ακρίβεια τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλ. το Δy.

Ι.2. <u>Ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής</u>: $\boxed{\hat{y}(x) \equiv \frac{(dy / y(x))}{dx} = (\frac{dy}{dx})(\frac{1}{y(x)})}$

- <u>Παράδειγμα 1</u>: Έστω η συνάρτηση $y = x^a$, όπου a πραγματική σταθερά.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό, προκύπτει: $\hat{y}(x) = (ax^{a-1})(\frac{1}{x^a}) = ax^{-1} = \frac{a}{x}$.

- <u>Παράδειγμα 2</u>: Έστω η συνάρτηση $y(x) = (z(x))^a$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό, και λαμβάνοντας υπόψη τον γνωστό κανόνα παραγώγισης <u>σύνθετης</u> συνάρτησης,[1] προκύπτει: $\hat{y}(x) = [(az(x)^{a-1})(\frac{dz}{dx})][\frac{1}{(z(x)^a}] = a(z(x))^{-1}(\frac{dz}{dx}) \rightarrow$

$\boxed{\hat{y}(x) = a\hat{z}(x)}$

- <u>Παράδειγμα 3</u>: Έστω η συνάρτηση $y(x) = z(x)h(x)$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό, και λαμβάνοντας υπόψη τον κανόνα παραγώγισης <u>γινομένου</u> συναρτήσεων,[2] προκύπτει: $\hat{y}(x) = (\frac{dz}{dx}h(x) + z(x)\frac{dh}{dx})(\frac{1}{y(x)}) \rightarrow$

$$\hat{y}(x) = [(\frac{dz}{dx})(\frac{h(x)}{y(x)})] + [(\frac{z(x)}{y(x)})(\frac{dh}{dx})] \rightarrow \hat{y}(x) = [(\frac{dz}{dx})(\frac{1}{z(x)})] + [(\frac{1}{h(x)})(\frac{dh}{dx})] \rightarrow$$

$\boxed{\hat{y}(x) = \hat{z}(x) + \hat{h}(x)}$

- <u>Παράδειγμα 4</u>: Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία αποδεικνύονται, εύκολα, τα εξής:

- $y(x) = \frac{z(x)}{h(x)} \rightarrow \boxed{\hat{y}(x) = \hat{z}(x) - \hat{h}(x)}$
- $y(x) = z(x) \pm h(x) \rightarrow \boxed{\hat{y}(x) = (\frac{z(x)}{y(x)})\hat{z}(x) \pm (\frac{h(x)}{y(x)})\hat{h}(x)}$

Ι.3. <u>Λογαριθμική παράγωγος:</u> Έστω η συνάρτηση $z(x) = \ln y(x),\ y(x) > 0$. Παραγωγίζοντας ως προς x προκύπτει:

---

[1] Υπενθυμίζεται: έστω $y = f(z)$, όπου $z = g(x)$, δηλ. $y = f(g(x))$. Ισχύει: $\frac{dy}{dx} = (\frac{dy}{dz})(\frac{dz}{dx})$.

[2] Υπενθυμίζεται: έστω $y(x) = z(x)h(x)$. Ισχύει: $\frac{dy}{dx} = (\frac{dz}{dx}h(x) + z(x)\frac{dh}{dx})$.

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x)}\frac{dy}{dx} \rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} = \hat{y}(x)}$. Άρα, η παράγωγος του λογαρίθμου μίας συνάρτησης (δηλ. η λογαριθμική παράγωγος) ισούται με τον ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής αυτής της συνάρτησης.

Ι.4. <u>Ελαστικότητα</u>: $\boxed{\varepsilon(x) \equiv \frac{(dy/y)}{(dx/x)} = (\frac{dy}{dx})(\frac{x}{y})}$

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η <u>γραμμική</u> συνάρτηση $y = ax + b$, όπου a και b θετικές παράμετροι (θα μπορούσε να νοηθεί ως η <u>συνάρτηση προσφοράς</u> ενός εμπορεύματος). Εφαρμόζοντας τον ορισμό λαμβάνουμε: $\varepsilon(x) = a[\frac{x}{(ax+b)}]$ ή, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το a, $\varepsilon(x) = \frac{x}{x + (b/a)}$. Επομένως, ισχύει $0 \le \varepsilon(x) < 1$, ενώ για $x \rightarrow +\infty$ προκύπτει $\varepsilon(x) \rightarrow 1$, πράγμα που διαπιστώνεται εύκολα εάν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή της τελευταίας σχέσης με το x, ήτοι $\varepsilon(x) = \frac{1}{1 + [b/(ax)]}$.

Ι.5. <u>Διαφορική Εξίσωση</u>: Η διαφορική εξίσωση συνιστά εξίσωση η οποία (i) εμπεριέχει παραγώγους μίας συνάρτησης (πρώτης ή/και ανώτερης τάξης), και (ii) έχει ως λύση της μία <u>‘οικογένεια’ συναρτήσεων</u>.

Τα ακόλουθα τρία παραδείγματα είναι πολύ σημαντικά για την οικονομική επιστήμη (και όχι μόνον):

- <u>Παράδειγμα 1</u>: <u>Υπάρχει συνάρτηση που ισούται με την πρώτη παράγωγό της</u>;

Άρα, αναζητούμε συνάρτηση $y = f(x)$, για την οποία ισχύει: $\frac{dy}{dx} = y(x)$. Η τελευταία σχέση γράφεται $\frac{dy}{y(x)} = dx$, οπότε ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε:

$\int \frac{dy}{y(x)} = \int dx \rightarrow \ln y(x) = x + c_0 \rightarrow \boxed{y(x) = ce^x}$, όπου c_0 είναι η λεγόμενη ‘σταθερά της ολοκλήρωσης’, e ($\simeq 2.718...$) η λεγόμενη ‘φυσική βάση’ των λογαρίθμων και $c_0 \equiv \ln c$.

- <u>Παράδειγμα 2</u>: <u>Υπάρχει συνάρτηση που ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της είναι σταθερός (δηλ. ανεξάρτητος του</u> x);

Άρα, αναζητούμε συνάρτηση $y = f(x)$, για την οποία ισχύει: $(\frac{dy}{dx})(\frac{1}{y(x)}) = a$, όπου a είναι πραγματικός αριθμός. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με προηγουμένως, προκύπτει: $\boxed{y(x) = ce^{ax}}$.

- <u>Παράδειγμα 3</u>: <u>Υπάρχει συνάρτηση που η ελαστικότητά της είναι σταθερή (δηλ. ανεξάρτητη του</u> x);

Άρα, αναζητούμε συνάρτηση $y = f(x)$, για την οποία ισχύει: $(\frac{dy}{dx})(\frac{x}{y(x)}) = a$, όπου a είναι πραγματικός αριθμός. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με προηγουμένως, προκύπτει: $\boxed{y(x) = cx^a}$.

II. <u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</u>: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

II.1. <u>Μερική Παράγωγος</u>: $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ κ.λπ..

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η συνάρτηση $y = A(x_1)^a (x_2)^b$, όπου A, a και b είναι <u>θετικές</u> πραγματικές σταθερές. Έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = Aa(x_1)^{a-1}(x_2)^b, \ \frac{\partial y}{\partial x_2} = A(x_1)^a b(x_2)^{b-1}, \ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = Aa(a-1)(x_1)^{a-2}(x_2)^b,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = Aa(x_1)^{a-1} b(x_2)^{b-1}.$$

- <u>Παρατήρηση 1</u>: Εάν οι <u>σταυροειδείς (ή μεικτές)</u> μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ και $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε είναι ίσες μεταξύ των (<u>Θεώρημα του Young</u>).

- <u>Παρατήρηση 2</u>: Η προαναφερθείσα συνάρτηση είναι γνωστή ως συνάρτηση Cobb-Douglas, και χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην οικονομική (αλλά όχι μόνον) επιστήμη. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται, κυρίως, στη θεωρία της κατανάλωσης, ως ‘συνάρτηση οφέλους-χρησιμότητας’, και στη θεωρία της παραγωγής, ως ‘συνάρτηση παραγωγής’. Ένα από τα σημαντικά, αλγεβρικά πλεονεκτήματά της είναι ότι, χωρίς να είναι γραμμική, καθίσταται γραμμική με λογαρίθμηση, ήτοι

$\ln y = \ln A + a(\ln x_1) + b(\ln x_2)$ ή $\boxed{Y = A' + aX_1 + bX_2}$, όπου $Y \equiv \ln y$, $A' \equiv \ln A$, $X_i \equiv \ln x_i$, $i = 1, 2$. Σημειώνεται, ότι η λογαρίθμηση μίας συνάρτησης συνιστά <u>μετασχηματισμό</u> αυτής, ο οποίος διατηρεί τη μονοτονία της συνάρτησης. Για αυτό η λογαρίθμηση συνάρτησης υπάγεται στην κατηγορία των <u>μονοτονικών μετασχηματισμών</u>.

II.2. <u>Ολικό Διαφορικό</u>: Ορίζεται ως $\boxed{dy \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n}$.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με το y, και πολλαπλασιάζοντας τον όρο i του αθροίσματος με $\frac{x_i}{x_i}$ $(=1)$ λαμβάνουμε:

$$\frac{dy}{y} = (\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y})(\frac{dx_1}{x_1}) + (\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{x_2}{y})(\frac{dx_2}{x_2}) + ... + (\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{x_n}{y})(\frac{dx_n}{x_n}) \rightarrow$$

$\boxed{\hat{y} = \varepsilon_1 \hat{x}_1 + \varepsilon_2 \hat{x}_2 + ... + \varepsilon_n \hat{x}_n}$, όπου $\hat{y} \equiv \frac{dy}{y}$ είναι ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής, $\hat{x}_i \equiv \frac{dx_i}{x_i}$ ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i, και $\varepsilon_i \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y}$ η <u>μερική ελαστικότητα</u> της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x_i.

- <u>Παρατήρηση</u>: Στην <u>ειδική</u> περίπτωση όπου $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = ... = \hat{x}_n$, η τελευταία σχέση γίνεται $\boxed{\hat{y} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n)\hat{x}_n = (\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i)\hat{x}_n}$

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η συνάρτηση Cobb-Douglas. Αφού

$\varepsilon_1 = Aa(x_1)^{a-1}(x_2)^b[\frac{x_1}{A(x_1)^a(x_2)^b}] = a$ και $\varepsilon_2 = A(x_1)^a b(x_2)^{b-1}[\frac{x_2}{A(x_1)^a(x_2)^b}] = b$, έπεται ότι $\hat{y} = a\hat{x}_1 + b\hat{x}_2$.

ΙΙ.3. <u>Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης</u>: Μία συνάρτηση $F(x_1, x_2) = 0$ καλείται <u>πεπλεγμένη</u> όταν <u>δεν</u> είναι δυνατόν να έρθει στη μορφή: $x_1 = f(x_2)$. Τέτοιες συναρτήσεις συναντώνται συχνά σε <u>ρεαλιστικά</u> προβλήματα. Το ζήτημα είναι: πώς υπολογίζουμε την παράγωγο $\frac{dx_1}{dx_2}$; Απάντηση: χρησιμοποιούμε τον τύπο του ολικού διαφορικού.

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η πεπλεγμένη συνάρτηση:

$F(x_1, x_2) = [(x_1^2) + (x_2)^2]^3 - 3[(x_1)^2 + (x_2)^2] + 1 = 0$ Ποια είναι η $\frac{dx_1}{dx_2}$;

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $y = F(x_1, x_2) = 0$, όπου $dy = 0$ και

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 2x_1 - 6x_1 = 6x_1\{[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 - 1\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 3[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 2x_2 - 6x_2 = 6x_2\{[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 - 1\}$$

Επομένως, από τον τύπο του ολικού διαφορικού λαμβάνουμε

$$dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 \rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial y / \partial x_2}{\partial y / \partial x_1} = -\frac{6x_2\{[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 - 1\}}{6x_1\{[(x_1)^2 + (x_2)^2]^2 - 1\}} = -\frac{x_2}{x_1}$$

ΙΙ.4. <u>Ομοιογενείς Συναρτήσεις</u>: Οι ομοιογενείς συναρτήσεις χρησιμοποιούνται συχνά στην οικονομική επιστήμη (και όχι μόνον). Μία συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ καλείται <u>ομοιογενής</u> όταν ικανοποιεί τη σχέση:

$\boxed{f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^v y,\ \forall \lambda \neq 0}$, όπου το v καλείται <u>βαθμός ομοιογένειας</u> της συνάρτησης.

- <u>Παράδειγμα 1</u>: Έστω η συνάρτηση Cobb-Douglas. Έχουμε:

$A(\lambda x_1)^a(\lambda x_2)^b = \lambda^{a+b}A(x_1)^a(x_2)^b = \lambda^{a+b}y$. Άρα, είναι ομοιογενής και, συγκεκριμένα, βαθμού $a+b$.

- <u>Παράδειγμα 2</u>: Έστω η συνάρτηση $y = \frac{(x_1)^2 x_2}{(x_1)^3 + (x_2)^3}$. Άρα, έχουμε:

$\frac{(\lambda x_1)^2(\lambda x_2)}{(\lambda x_1)^3 + (\lambda x_2)^3} = \frac{\lambda^3[(x_1)^2 x_2]}{\lambda^3[(x_1)^3 + (x_2)^3]} = \lambda^0 \frac{(x_1)^2 x_2}{(x_1)^3 + (x_2)^3} = \lambda^0 y = y$. Άρα, είναι ομοιογενής βαθμού μηδέν.

- <u>Παράδειγμα 3</u>: Έστω η συνάρτηση που σχηματίζεται από την πρόσθεση μίας θετικής πραγματικής σταθεράς B στη συνάρτηση Cobb-Douglas, ήτοι $y = A(x_1)^a(x_2)^b + B$. Έχουμε:

$$A(\lambda x_1)^a(\lambda x_2)^b + B = \lambda^{a+b}A(x_1)^a(x_2)^b + B = \lambda^{a+b}(y-B)+B = \lambda^{a+b}y + (1-\lambda^{a+b})B$$

Άρα, <u>δεν</u> είναι ομοιογενής.

Η Σχέση (ή Θεώρημα) του Euler για Ομοιογενείς Συναρτήσεις

Για τις ομοιογενείς συναρτήσεις ισχύει μία πρόταση, γνωστή ως ‘Σχέση (ή Θεώρημα) του Euler’, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική για την οικονομική επιστήμη (αλλά όχι μόνον) και, ειδικά, για τη <u>θεωρία της κατανομής του εισοδήματος</u>. Έχει ως εξής: παραγωγίζωντας τη σχέση ορισμού μίας ομοιογενούς συνάρτησης ως προς λ προκύπτει

$$\frac{\partial y}{\partial(\lambda x_1)}\frac{\partial(\lambda x_1)}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial(\lambda x_2)}\frac{\partial(\lambda x_2)}{\partial \lambda} + ... + \frac{\partial y}{\partial(\lambda x_n)}\frac{\partial(\lambda x_n)}{\partial \lambda} = \nu\lambda^{\nu-1}y \rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial(\lambda x_1)}x_1 + \frac{\partial y}{\partial(\lambda x_2)}x_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial(\lambda x_n)}x_n = \nu\lambda^{\nu-1}y.$$

Επειδή αυτή η σχέση ισχύει <u>για κάθε</u> λ, μπορούμε να θέσουμε $\lambda = 1$. Επομένως, έχουμε

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}x_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}x_n = \nu y}$$ (Σχέση Euler).

Τέλος, διαιρώντας και τα δύο μέλη με y, και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση ορισμού της μερικής ελαστικότητας, προκύπτει

$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n) = \nu \rightarrow \boxed{(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i) = \nu}$, δηλ. <u>το άθροισμα των μερικών ελαστικοτήτων ομοιογενούς συνάρτησης ισούται με το βαθμό ομοιογένειας της συνάρτησης</u>.

- <u>Παρατήρηση</u>: Θεώρησε μία συνάρτηση Cobb-Douglas.

III. <u>Εύρεση Ακροτάτων Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών Χωρίς ή Με Περιορισμό</u>

III.1. Χωρίς Περιορισμό

Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2)$. Εάν η συνάρτηση έχει ακρότατα τότε αυτά βρίσκονται από την επίλυση των εξισώσεων: $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$ <u>και</u> $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$. Αυτές οι δύο εξισώσεις καλούνται <u>αναγκαίες (ή πρώτης τάξεως) συνθήκες</u>, διότι οι τιμές των x_1, x_2 που μηδενίζουν τις πρώτες μερικές παραγώγους (γνωστές και ως <u>κρίσιμα σημεία</u>) <u>δεν είναι κατανάγκην</u> ακρότατα της συνάρτησης (ωστόσο, τιμές των x_1, x_2 που <u>δεν</u> μηδενίζουν τις πρώτες μερικές παραγώγους, <u>σίγουρα δεν</u> είναι ακρότατα της συνάρτησης).

Περαιτέρω, θεωρούμε το μέγεθος D, το οποίο ορίζεται ως εξής (<u>συνιστά την ορίζουσα της λεγόμενης μήτρας του Hess</u>):

$$D \equiv \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

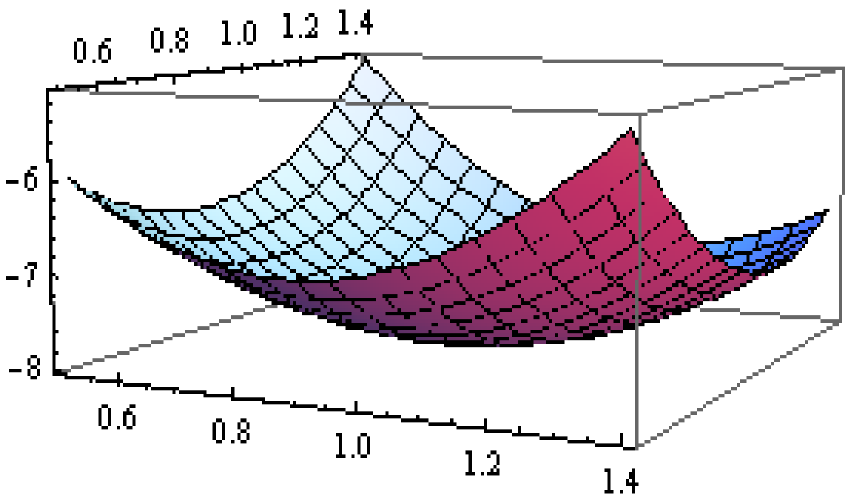
και βρίσκουμε την τιμή του για τις τιμές των x_1, x_2 που μηδενίζουν τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης. Τέλος, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i). Εάν $D > 0$ <u>και</u> $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} < 0$ (ή $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} < 0$), τότε <u>υπάρχει</u> ακρότατο και είναι, συγκεκριμένα, <u>μέγιστο</u>.

(ii). Εάν $D>0$ <u>και</u> $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\ 2}}>0$ (ή $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\ 2}}>0$), τότε <u>υπάρχει</u> ακρότατο και είναι, συγκεκριμένα, <u>ελάχιστο</u>.
(iii). Εάν $D=0$, τότε <u>δεν</u> μπορούμε να αποφανθούμε (δηλ. η παρούσα μέθοδος αστοχεί και, άρα, απαιτείται διερεύνηση σε διαφορετική βάση).
(iv). Εάν $D<0$, τότε <u>δεν</u> υπάρχει ακρότατο, αλλά είτε <u>σημείο καμπής</u> ή <u>σαγμοειδές σημείο</u> (πράγμα που θα πει: σημείο το οποίο είναι μέγιστο ως προς τη μία μεταβλητή και ελάχιστο ως προς την άλλη). Το πρώτο ισχύει όταν οι $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\ 2}}$ και $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\ 2}}$ είναι ομόσημες, ενώ το δεύτερο όταν είναι ετερόσημες.
Τέλος, σημειώνεται ότι οι συνθήκες που ενέχονται στις περιπτώσεις (i) έως και (iv) καλούνται <u>ικανές (ή δευτέρας τάξεως) συνθήκες</u>.
- <u>Παράδειγμα 1</u>: Έστω η συνάρτηση $y=6(x_1)^2-9x_1-3x_1x_2-7x_2+5(x_2)^2$. Έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=0 \rightarrow 12x_1-9-3x_2=0 \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x_2}=0 \rightarrow -3x_1-7+10x_2=0$$

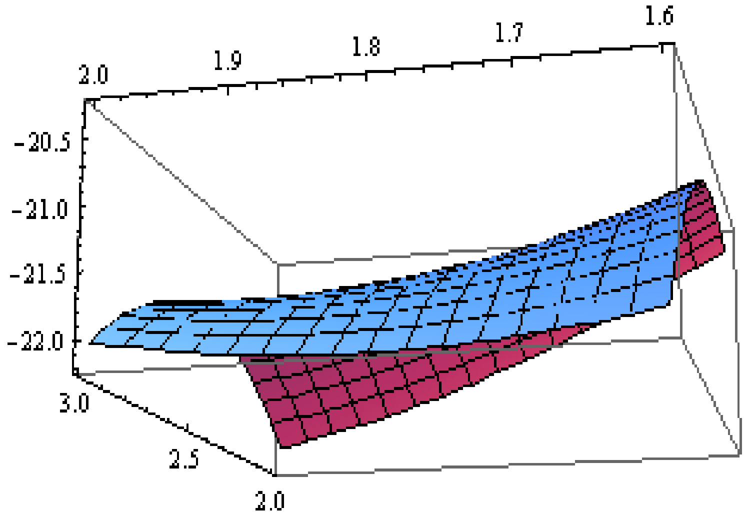
Επιλύοντας αυτό το σύστημα 2 εξισώσεων-2 αγνώστων προκύπτει $x_1^{\ *}=1$ και $x_2^{\ *}=1$. Αυτό είναι το <u>κρίσιμο σημείο</u>, δηλ. το σημείο εκείνο, στο οποίο η συνάρτηση εμφανίζει, <u>ενδεχομένως</u>, ακρότατο. Τώρα, εξετάζουμε τις <u>συνθήκες δευτέρας τάξεως</u>. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\ 2}}=12$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\ 2}}=10$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}=-3$ και $D=(12\times 10)-(-3)^2=111>0$.
Άρα, η συνάρτηση εμφανίζει ελάχιστο στο σημείο $(x_1^{\ *}=1, x_2^{\ *}=1)$, πράγμα που είναι εμφανές, τρόπον τινά, και στο γράφημά της (βλ. Σχήμα 1), το οποίο κατασκευάσθηκε μέσω του προγράμματος <u>Mathematica</u>.



ΣΧΗΜΑ 1. <u>Περίπτωση ελαχίστου</u>

- <u>Παράδειγμα 2</u>: Έστω η συνάρτηση $y=5(x_1)^2-30x_1+4x_1x_2+7x_2-3(x_2)^2$. Έχουμε:

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \to 10x_1 - 30 + 4x_2 = 0$ και $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \to 4x_1 + 7 - 6x_2 = 0$. Επιλύοντας αυτό το σύστημα 2 εξισώσεων-2 αγνώστων προκύπτει $x_1^* = 2$ και $x_2^* = 2.5$. Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο, δηλ. το σημείο εκείνο, στο οποίο η συνάρτηση εμφανίζει, ενδεχομένως, ακρότατο. Τώρα, εξετάζουμε τις συνθήκες δευτέρας τάξεως. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 10$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -6$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = 4$ και $D = 10(-6) - 4^2 = -76 < 0$. Άρα, το σημείο $(x_1^* = 2, x_2^* = 2.5)$ είναι σαγμοειδές, πράγμα που είναι εμφανές, τρόπον τινά, και στο γράφημά της (βλ. Σχήμα 2), το οποίο κατασκευάσθηκε μέσω του προγράμματος Mathematica.



ΣΧΗΜΑ 2. Περίπτωση σάγματος

ΙΙΙ.2. Με περιορισμό

Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2)$, η οποία υπόκειται στον περιορισμό $g(x_1, x_2) = c$, όπου c είναι πραγματική σταθερά. Αναζητούμε τα ακρότατα αυτής.

Στην περίπτωση ύπαρξης περιορισμού εφαρμόζουμε τη Μέθοδο του Lagrange. Κατά πρώτον, η εν λόγω μέθοδος συνίσταται στο σχηματισμό της ακόλουθης συνάρτησης τριών μεταβλητών (γνωστή ως Λαγκρανζιανή συνάρτηση):

$$L(x_1, x_2, \lambda) \equiv f(x_1, x_2) + \lambda(c - g(x_1, x_2))$$

όπου το λ είναι άγνωστος πραγματικός αριθμός, ο οποίος καλείται πολλαπλασιαστής Lagrange. Εάν η συνάρτηση έχει ακρότατα τότε αυτά βρίσκονται από την επίλυση του ακολούθου συστήματος 3 εξισώσεων-3 αγνώστων (συνθήκες πρώτης τάξεως):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - g(x_1, x_2) = 0$$

Συνθήκες δευτέρας τάξεως:

Θεωρούμε το μέγεθος D_L, το οποίο ορίζεται ως εξής (συνιστά την ορίζουσα της λεγόμενης οριοθετημένης μήτρας του Hess):

$$D_L \equiv -\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2}\right)-\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2}\right)+2\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

Εάν το D_L είναι θετικό (αρνητικό), τότε έχουμε μέγιστο (ελάχιστο).

Ερμηνεία του Πολλαπλασιαστή Lagrange

Το ολικό διαφορικό της συνάρτησης του περιορισμού είναι:

$$dc = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις κατά σειρά δύο πρώτες συνθήκες πρώτης τάξεως, η τελευταία σχέση γράφεται:

$$dc = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{1}{\lambda}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{1}{\lambda}dx_2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2\right)$$

Ο εντός παρενθέσεων όρος είναι, όμως, το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $y = f(x_1, x_2)$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$dc = \frac{1}{\lambda}dy \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{dy}{dc}} \rightarrow \boxed{\Delta y \approx \lambda \Delta c}$$

Συνεπώς, ο πολλαπλασιαστής μετράει το κατά πόσον θα μεταβληθεί η ακρότατη τιμή της συνάρτησης y συνεπεία μίας μεταβολής της σταθεράς, c, της συνάρτησης του περιορισμού και, ειδικότερα, για $\Delta c = 1$ μπορούμε να γράψουμε: $\Delta y \approx \lambda$.

- Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = 4(x_1)^2 + 3x_1x_2 + 6(x_2)^2$ που υπόκειται στον περιορισμό $x_1 + x_2 = 56$.

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι η $L \equiv 4(x_1)^2 + 3x_1x_2 + 6(x_2)^2 + \lambda[56 - (x_1 + x_2)]$.

Συνθήκες πρώτης τάξεως:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 8x_1 + 3x_2 - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 3x_1 + 12x_2 - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 56 - (x_1 + x_2) = 0 \quad (3)$$

Αφαιρώντας την (2) από την (1) προκύπτει

$5x_1 - 9x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1.8x_2$ (4).

Εισαγάγοντας την (4) στην (3) προκύπτει $56 - 2.8x_2 = 0 \rightarrow x_2{}^* = 20$. Συνεπώς, $x_1{}^* = 36$ και $\lambda^* = 348$.

Συνθήκες δευτέρας τάξεως:

$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\ 2}} = 8$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^{\ 2}} = 12$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 3$, $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1$ και $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 1$. Άρα, η ορίζουσα της οριοθετημένης μήτρας του Hess είναι αρνητική (ίση με –14) και, συνεπώς, το κρίσιμο σημείο $(x_1^* = 36, x_2^* = 20)$ συνιστά ελάχιστο.

Σε αυτό το σημείο η τιμή της συνάρτησης ισούται με $y^* = 4(36)^2 + 3(36)(20) + 6(20)^2 = 9744$.

Έστω, τώρα, ότι η σταθερά του περιορισμού αυξάνεται κατά 1 μονάδα, δηλ. γίνεται 57. Εάν επιλύσουμε εκ νέου το πρόβλημα θα βρούμε: $(x_1^{**} = 36.64, x_2^{**} = 20.36) \to y^{**} \simeq 10095.107$. Όσον αφορά, όμως, στον προσδιορισμό της νέας τιμής του y, αυτή δύναται να εκτιμηθεί μέσω του πολλαπλασιαστή Lagrange. Γνωρίζουμε a priori ότι $y^{**} - y^* \approx \lambda^*$, από όπου βρίσκουμε ότι $y^{**} \approx 9744 + 348 = 10092$. Το σχετικό σφάλμα αυτής της εκτίμησης είναι, λοιπόν, της τάξης του

$$(10095.107 - 10092)/10095.107 \simeq 0.031\%.$$

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- Εγχειρίδια Οικονομικών Μαθηματικών

Chiang, A. C. (1997) Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης, Αθήνα, Κριτική.

Dowling, E. T. (1980) Theory and Problems of Mathematics for Economists, New York, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.

Λουκάκης, Μ. (1991) Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Θεσσαλονίκη.

Τσουλφίδης, Λ. (2002) Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Αθήνα, Gutenberg.

- Λεξικά Οικονομικών και Μαθηματικών

Borowski, E. J. and Borwein, J. M. (1989) Dictionary of Mathematics, London, Collins.

Eatwell, J., Milgate, M. and Newman, P. (eds) (1987) The New Palgrave. A Dictionary of Economics, London, Macmillan (νεότερη έκδοση, με προσθήκες αλλά και αφαιρέσεις: Durlauf S. N. and Blume, L. E. (eds) (2008) The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd Edition, London, Palgrave Macmillan).

Pass, C., Lowes, B. and Davies, L. (1988) Dictionary of Economics, London, Collins.

- Εγχειρίδιο για το Mathematica

Τραχανάς, Σ. (2001) Mathematica και Εφαρμογές, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- Εγχειρίδια Μαθηματικών

Demitovich, B. (ed.) (1977) Receuil d' Exercices et de Problèmes d' Analyse Mathématique, Moscou, Mir.

Spiegel, M. (1982) Ανώτερα Μαθηματικά, Αθήνα, ΕΣΠΙ.

Σημείωση: Εκτενές υλικό, σχετικό με όλα αυτά τα πεδία, βρίσκεται ελεύθερο στο διαδίκτυο. Για παράδειγμα, όσον αφορά στα Οικονομικά Μαθηματικά, βλ. στη διεύθυνση: http://www.economicsnetwork.ac.uk/teaching/text/mathsforeconomists.htm